Klausurvorbereitung zum Seminar „Formale Logik“ im Sommersemester 2005
Philipps-Universität Marburg, Fachbereich 03. Dozent: Willem Warnecke.
- Zusammenfassung
- Beispiele
- Merkblatt I und Formelsammlung (jeweils korrigiert)

(w) Manuel Haim, 05-Jul-2005

Dieses Dokument soll eine Kurzzusammenfassung des Seminars darstellen und ersetzt keinesfalls das Seminar selbst!

Syllogismen *(siehe auch Merkblatt I)*
- Aus zwei gegebenen Prämissen (Voraussetzungen) folgt eine Conclusio (Schlussfolgerung).
- Begriffe: Prädikat (P), Subjekt (S), Mittelbegriff (M).
- Es gibt vier Syllogismus-Figuren. Die Position von M merkt man sich anhand des W-Schemas. P steht in der ersten, S in der zweiten Prämisse. Die Conclusio ist in allen Figuren SxP.
- Für die gültigen Syllogismen gibt es Namen (barbara usw.):
    - Deren Vokale geben an, in welchem Bezug die Begriffe in den Prämissen und der Conclusio zueinander stehen (a, i, e, o, von: **a**ff**i**rmo=ich bestätige, n**e**g**o**=ich verneine, Merkhilfe: a=alle sind, i=einige sind, e=alle sind nicht=keins ist, o=einige sind nicht).
        - Prüfen der Richtigkeit z.B. mit Venn-Diagramm (Mengendiagramm, hier mit drei Mengen P, S, M)
            - a, e: nichtzutreffenden Mengenteil schraffieren
            - i, o: ein kleines x in zutreffenden Mengenteil/Rand malen
            - aus beiden Prämissen muss sich die Conclusio ergeben
    - Die Konsonanten geben an, wie man den Syllogismus in die erste Figur umformt:
        - Erster Buchstabe gibt den Syllogismus der ersten Figur an.
        - Die Buchstaben s, p, m, c geben die notwendige Veränderung an und stehen hinter dem Vokal, auf den sie sich beziehen.
            - s: Tausch der Begriffe (z.B. wird SxP zu PxS)
            - p: Tausch der Begriffe und Übernehmen des Bezugs aus Zielfigur
            - m: Tausch der beiden Prämissen
            - c: Tausch der Zeile mit Conclusio und Negation beider Bezüge (aus a wird o und umgekehrt, aus i wird e und umgekehrt)
- Die vier Bezüge a, i, e, o bilden ein Logisches Quadrat.
    - Darin gibt's diese Gegensätze: konträr, subkonträr, kontradiktorisch, subaltern (lernen!)

Aussagenlogik (Junktorenlogik) *(siehe auch Formelsammlung)*
- Logik = Lehre von gültigen Schlüssen
- Eine Aussage stellt einen Sachverhalt dar („Alle Rosen sind rot.“). Sachverhalte können wahr oder nicht wahr sein.
- Tatsachen sind bestehende Sachverhalte.
- Aussagen sind die Atome der Aussagenlogik (Großbuchstaben, hier: Formelvariablen)
- Eine Formel ist eine einzelne Formelvariable/Atom oder eine Verknüpfung von anderen Formeln (oder Formelvariablen/Atomen) durch Junktoren
- Junktoren
    - einstellig: $\neg\square$
    - zweistellig: $\square\wedge\square$ (wie A in engl. AND, lat. ATQUE), $\square\vee\square$ (wie V in lat. VEL), $\square\rightarrow\square$, $\square\leftrightarrow\square$, $\square|\square$ (Sheffer-Strich = NAND = NOT AND)
- Wahrheitstafeln
    - haben Zeilen für alle Belegungskombinationen (1, 0) der Formelvariablen.
    - Bei n verschiedenen Formelvariablen gibt es 2^n solcher Kombinationen, also 2^n Zeilen.
    - Über der ersten Zeile steht eine Formel (z.B. $F \wedge G$).
    - Jede Zeile ist eine Welt, in der die Formelvariablen eindeutig belegt sind (1, 0).

- Nachdem man alle Belegungen unter die Formelvariablen geschrieben hat, kann man die Belegungen für die Junktoren „ausrechnen“, wobei man bei den innersten Junktoren beginnt (genauso wie man in Mathe z.B. $(2+3)*(4+6)$ ausrechnet, also $2+3=5$, $4+6=10$, $5*10=50$).
- Die Belegung unter dem höchsten Junktor entspricht dann der Belegung der Formel.

• Ein Modell einer Formel ist eine Welt, in der die Formel wahr ist.

• Eine Formel, bei der alle Welten Modelle sind, nennt man Tautologie oder allgemeingültig (immer wahr).

• Regeln von deMorgan:
- $F^* \wedge G^* \Leftrightarrow \neg(\neg F^* \vee \neg G^*)$
- $F^* \vee G^* \Leftrightarrow \neg(\neg F^* \wedge \neg G^*)$

• Auflösung von Bisubjunktion und Subjunktion:
- $F^* \leftrightarrow G^* \Leftrightarrow (F^* \rightarrow G^*) \wedge (G^* \rightarrow F^*)$
- $F^* \rightarrow G^* \Leftrightarrow \neg(F^* \wedge \neg G^*) \Leftrightarrow \neg F^* \vee G^*$

• Normalformen
- Erhält man durch Umformung, kann man aber auch direkt aus Wahrheitstafel ablesen.
- Man sieht dann leicht, ob eine Formel eine Tautologie ist.
- Jede Formel lässt sich sowohl in KNF als auch in DNF umformen.
- Konjunktive Normalform (KNF)
  - Konjunktion von Disjunktionen, z.B. $(F \vee G) \wedge (F \vee \neg G)$ oder $(F \vee G) \wedge F$
  - Alle Glieder müssen Tautologie sein, damit die Formel eine Tautologie ist.
- Disjunktive Normalform (DNF)
  - Disjunktion von Konjunktionen, z.B. $(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$ oder $G \vee (F \wedge G)$
  - Mindestens ein kontradiktorischer Gegensatz, damit die Formel eine Tautologie ist.

• Schlussregeln
- Modus Ponens (MP) (lat. „setzend“)
$$\frac{F^* \rightarrow G^* \quad F^*}{G^*}$$
- Modus Tollens (MT) (lat. „hebend“)
$$\frac{F^* \rightarrow G^* \quad \neg G^*}{\neg F^*}$$
- Konstruktives Dilemma (KD)
$$\frac{(F^* \rightarrow G^*) \wedge (H^* \rightarrow I^*) \quad F^* \vee H^*}{G^* \vee I^*}$$
- Destruktives Dilemma (DD)
$$\frac{(F^* \rightarrow G^*) \wedge (H^* \rightarrow I^*) \quad \neg G^* \vee \neg I^*}{\neg F^* \vee \neg H^*}$$
- Hypothetischer Syllogismus (HS)
$$\frac{F^* \rightarrow G^* \quad G^* \rightarrow H^*}{F^* \rightarrow H^*}$$
- Disjunktiver Syllogismus (DS)
$$\frac{F^* \vee G^* \quad \neg F^*}{G^*}$$

• Lateinische Merksätze
- Salva veritate – Aus Wahrem soll Wahres folgen.
- „Paradoxien der materialen Implikation“:
  - Ex falso quodlibet – Aus Falschem folgt Beliebiges: $\perp \rightarrow F^*$
  - Verum ex quodlibet – Das Wahre folgt aus Beliebigem: $F^* \rightarrow \top$
- Duplex negatio affirmat – Doppelte Verneinung fällt weg: $\neg\neg F \Leftrightarrow F$
- Tertium non datur – Satz vom ausgeschlossenen Dritten: $F \vee \neg F$
  (entspricht nach deMorgan dem Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch: $\neg(\neg F \wedge F)$)
- Antezedens und Sukzedens bei Subjunktion: $\underbrace{F}_{\text{Antezedens}} \rightarrow \underbrace{G}_{\text{Sukzedens}}$

Prädikatenlogik *(siehe auch Formelsammlung)*

- „Subjekt = Prädikat" (Subjekt: Kleinbuchstabe, Prädikat: Großbuchstabe)
- Die Legende gibt die Belegung von Prädikatenkonstanten und Individualkonstanten an.
    - z.B. folgende Legende:

      Mx – x ist ein Mensch, *s* – Sokrates

      Dann heißt *Ms* „Sokrates ist ein Mensch"
- All- und Existenz-Quantoren:
    - $\forall x\, Ax$ „für alle x gilt: Ax"
    - $\exists x\, Ax$ „es gibt mindestens ein x, für das gilt: Ax"
    - $\neg\exists\, Ax$ „es gibt kein x, für das gilt: Ax"
    - $\neg\forall x\, Ax$ „für nicht alle x gilt: Ax"
- Individualkonstanten (freie Individualvariablen)
    - stehen für ein Ding
    - werden in der Legende definiert
    - sind „freie" Individualvariablen, da sie nicht an All-/Existenz-Quantor gebunden sind
- Individualvariablen (gebundene Individualvariablen)
    - stehen für ein Ding
    - sind an All-/Existenz-Quantor gebunden
- Prädikatenkonstanten (freie Prädikatenvariablen)
    - weisen Dingen Eigenschaften zu
    - werden in Legende definiert
    - sind „freie" Prädikatenvariablen, da sie nicht an All-/Existenz-Quantor gebunden sind
- Prädikatenvariablen (gebundene Prädikatenvariablen)
    - weisen Dingen Eigenschaften zu
    - sind an All-/Existenz-Quantor gebunden

Kalkül des natürlichen Schließens *(siehe auch Formelsammlung)*

- Ein System zum Schlussfolgern durch gegebene Formeln (Prämissen) und Regeln.
- Vorgehen mittels Tabelle (hier als Beispiel der Beweis des Modus Ponens):

Zeile	Formel	Regel	Angewandt auf	Abhängig von
1.	$F \to G$	P		(1)
2.	F	P		(2)
3.	G	$(\to B)$	1, 2	(1, 2)

- Vier Regeltypen: Prämisse (P), Annahme (A), Einführung (E), Beseitigung (B)
    - P: Alle Prämissen stehen ganz zu Anfang. Prämissen sind nur von sich selbst abhängig.
    - A: Beliebige Annahmen sind dann jederzeit möglich (man braucht sie oft für die E- und B-Regeln) und sind nur von sich selbst abhängig.
    - E, B: Diverse Regeln zur Einführung und Beseitigung von Junktoren.
        - Diese werden jeweils auf existierende Zeilen angewandt.
        - In Klammern wird die Abhängigkeit notiert. Das sind genau die Zeilennummern, die bei den von der Regel verwendeten Zeilen in Klammern stehen.
        - Steht bei der Regel eine Annahme in eckigen Klammern [], wird die der Annahme entsprechende Zeilennummer aus der Abhängigkeit gestrichen.
- Eine Zeile lässt sich aus genau den Zeilen folgern, von denen sie abhängt.
- Hinweise zu Quantorenlogischen Erweiterungen:
    - Alle Quantorenlogik ist Prädikatenlogik.
    - Das Quantifizieren über Prädikate $(\forall P\, Pa)$ ist eine Prädikatenlogik höherer Stufe.

Semantische Bäume *(siehe auch Formelsammlung)*

- Eine indirekte Beweismethode. Die zu beweisende Formel wird negiert und ein Widerspruch hergeleitet. Wenn die negierte Formel immer falsch ist, dann ist die Formel selbst eine Tautologie (immer wahr).
- Die negierte Formel wird gemäß der Entwicklungsregeln für die Semantischen Bäume „entwickelt“:
    - Entwickelte Formeln werden abgehakt (auf jede Formel passt nur eine einzige Regel).
    - Es können mehrere Verzweigungen entstehen:
        - Zweige, die auf einen Widerspruch (X) enden, werden nicht weiter entwickelt.
        - Hat man einmal mehrere Zweige und entwickelt eine Formel, die vor einer Verzweigung steht, muss man die Entwicklungen in alle Zweige der Verzweigung schreiben.
        - Es spart also viel Schreibarbeit, wenn man zunächst alle Regeln anwendet, die nicht verzweigen.
    - Jeder Zweig muss schließlich mit einem Widerspruch (X) enden.
        - Ist das der Fall, dann ist die negierte Formel immer falsch, also ist die Formel eine Tautologie. (Es müssen übrigens nicht alle Formeln im Baum abgehakt sein.)
        - Wenn sich nicht für alle Zweige Widersprüche entwickeln lassen, dann ist die Formel keine Tautologie.
- Hinweise zu Quantorenlogischen Erweiterungen:
    - Erweitert die Semantischen Bäume hinsichtlich der Prädikatenlogik.
    - Es lassen sich dann also auch Formeln der Prädikatenlogik beweisen.

Beispiele

Einen Syllogismus aus dessen Namen heraus aufschreiben

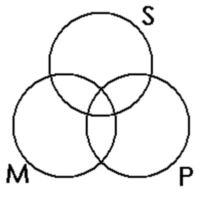
barbara (1. Figur)

$$\text{1. Figur}\quad \begin{array}{c} \text{MxP} \\ \underline{\text{SxM}} \\ \text{SxP} \end{array} \quad \overset{\text{barbara}}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{c} \text{MaP} \\ \underline{\text{SaM}} \\ \text{SaP} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \text{alle M sind P} \\ \underline{\text{alle S sind M}} \\ \text{alle S sind P} \end{array} \text{, z.B.} \quad \begin{array}{c} \text{alle Menschen sind sterblich} \\ \underline{\text{alle Studenten sind Menschen}} \\ \text{alle Studenten sind sterblich} \end{array}$$

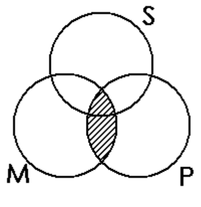
Beweis eines Syllogismus mittels Venn-Diagramm

celarent (1. Figur)

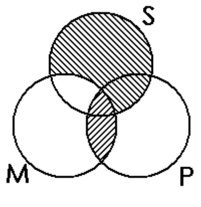
$$\begin{array}{c} \text{MeP} \\ \underline{\text{SaM}} \\ \text{SeP} \end{array}$$



MeP ⇒



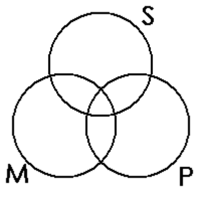
SaM ⇒



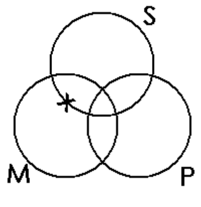
⇒ SeP

bocardo (3. Figur)

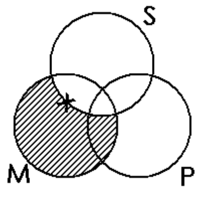
$$\begin{array}{c} \text{MoP} \\ \underline{\text{MaS}} \\ \text{SoP} \end{array}$$



MoP ⇒



MaS ⇒



⇒ SoP

Zurückführen eines Syllogismus auf die erste Figur

darapti (3. Figur)

$$\text{darapti}\quad \frac{\begin{array}{c}\text{MaP}\\ \text{MaS}\end{array}}{\text{SiP}} \quad \begin{array}{c} p=\textit{conversio per accidens}\\ (\textit{zweite Zeile})\\ \Rightarrow \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c}\text{MaP}\\ \text{S}\square\text{M}\end{array}}{\text{SiP}} \quad \begin{array}{c} d=\textit{darii}\\ \Rightarrow \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c}\text{MaP}\\ \text{SiM}\end{array}}{\text{SiP}} \quad \text{darii}$$

baroco (2. Figur)

$$\text{baroco}\quad \frac{\begin{array}{c}\text{PaM}\\ \text{SoM}\end{array}}{\text{SoP}} \quad \begin{array}{c} c=\textit{contradictio}\\ (\textit{zweite Zeile})\\ \Rightarrow \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c}\text{PaM}\\ \text{SaP}\end{array}}{\text{SaM}} \quad \text{barbara}$$

dimaris (4. Figur)

$$\text{dimaris}\quad \frac{\begin{array}{c}\text{PiM}\\ \text{MaS}\end{array}}{\text{SiP}} \quad \begin{array}{c} m=\textit{mutatio}\\ \Rightarrow \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c}\text{MaS}\\ \text{PiM}\end{array}}{\text{SiP}} \quad \begin{array}{c} s=\textit{conversio simplex}\\ (\textit{dritte Zeile})\\ \Rightarrow \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c}\text{MaS}\\ \text{PiM}\end{array}}{\text{PiS}} \quad \text{darii}$$

Bedeutungen der Junktoren

$\neg F$ nur wahr wenn F falsch
$F \wedge G$ nur wahr wenn beide wahr
$F \vee G$ nur falsch wenn beide falsch
$F \rightarrow G$ nur falsch wenn F wahr aber G falsch
$F \leftrightarrow G$ nur wahr wenn F derselbe Wahrheitswert wie G zukommt

Belegungskombinationen einer Wahrheitstafel

F	G	H
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Eine Wahrheitstafel mit n verschiedenen Formelvariablen hat 2^n Zeilen. Um alle Belegungen zu finden, gibt es zwei einfache Möglichkeiten, die auf das selbe Ergebnis hinauslaufen:

- Binärzahl-Methode: Man zählt im 2er-Zahlensystem von $1\ldots1$ nach $0\ldots0$
- 1-0-Abwechsel-Methode (einfach): Man belegt die Spalte der letzten Formelvariablen abwechselnd mit 1 und 0. Dann geht man zur Spalte der vorigen Formelvariablen und wechselt jeweils erst nach zwei Zeilen ab. Das macht man Spalte für Spalte und verdoppelt jeweils die Anzahl der Zeilen, nach denen man sich abwechselt.

Im Beispiel links gibt es 3 Formelvariablen, also $2^3 = 2*2*2 = 8$ Zeilen.

Wenn eine Formelvariable mehrmals vorkommt, markiert man sich am besten das erste Auftauchen jeder Formelvariablen und befüllt zunächst nur diese Spalten. Dann „kopiert" man die Einträge.

Ausrechnen einer Wahrheitstafel

Am Beispiel der Formel $F \wedge G \Rightarrow F$. Belegung mittels obiger 1-0-Abwechsel-Methode.

F	∧	G	⇒	F
		1		
		0		
		1		
		0		

G ist die letzte Formelvariable.

F	∧	G	⇒	F
1		1		
1		0		
0		1		
0		0		

F ist die zweitletzte Formelvariable.

F	∧	G	⇒	F
1		1		1
1		0		1
0		1		0
0		0		0

Kopieren der Spalte F.

F	∧	G	⇒	F
1	1	1		1
1	0	0		1
0	0	1		0
0	0	0		0

Innerste Junktoren zuerst ausrechnen.

F	∧	G	⇒	F
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	0	0	1	0

Oberster Junktor ist immer 1, also ist die Formel gültig.

Beweis durch Umformung

Die Formel $F \wedge G \Rightarrow F$ lässt sich auch durch Umformung beweisen:

$(F \wedge G \Rightarrow F)$

$\Leftrightarrow (F \wedge G) \rightarrow F$ (Entfernen der Metazeichen)

$\Leftrightarrow \neg(F \wedge G) \vee F$ (Auflösen der Subjunktion)

$\Leftrightarrow (\neg F \vee \neg G) \vee F$ (deMorgan)

$\Leftrightarrow \neg F \vee \neg G \vee F$ (Adjunktoren sind gleichwertig)

Das Ergebnis ist hier eine Formel in DNF. Zwischen $\neg F$ und F besteht ein kontradiktorischer Gegensatz, also ist die Formel gültig.

Beweis durch das Kalkül des natürlichen Schließens

Beweis des Modus Tollens
$(F \rightarrow G) \wedge \neg G \Rightarrow \neg F$

1.	$F \rightarrow G$	P(1)
2.	$\neg G$	P(2) $\Rightarrow \neg F$?
3.	F	A(3)
4.	G	$(\rightarrow B)$ 1, 3 (1, 3)
5.	$\perp$	$(\neg B)$ 2, 4 (1, 2, 3)
6.	$\neg F$	$(\neg E)$ 3, 5 (1, 2, ~~3~~)

Beweis des Syllogismus barbara (1. Figur)

MaP
SaM
SaP

1.	$\forall x(\mathrm{Mx} \rightarrow \mathrm{Px})$	P(1)
2.	$\forall x(\mathrm{Sx} \rightarrow \mathrm{Mx})$	P(2) $\Rightarrow \forall x(\mathrm{Sx} \rightarrow \mathrm{Px})$?
3.	$\mathrm{Ma} \rightarrow \mathrm{Pa}$	$(\forall B)$ 1 (1)
4.	$\mathrm{Sa} \rightarrow \mathrm{Ma}$	$(\forall B)$ 2 (2)
5.	Sa	A(5)
6.	Ma	$(\rightarrow B)$ 4, 5 (2, 5)
7.	Pa	$(\rightarrow B)$ 6, 3 (1, 2, 5)
8.	$\mathrm{Sa} \rightarrow \mathrm{Ma}$	$(\rightarrow E)$ 5, 7 (1, 2, ~~5~~)
9.	$\forall x(\mathrm{Sx} \rightarrow \mathrm{Px})$	$(\forall E)$ 8 (1, 2)

Beweis des Syllogismus bocardo (3. Figur)

MoP
MaS
SoP

1.	$\exists x(\mathrm{Mx} \wedge \neg \mathrm{Px})$	P(1)
2.	$\forall x(\mathrm{Mx} \rightarrow \mathrm{Sx})$	P(2) $\Rightarrow \exists x(\mathrm{Sx} \wedge \neg \mathrm{Px})$?
3.	$\mathrm{Ma} \wedge \neg \mathrm{Pa}$	A(3)
4.	$\mathrm{Ma} \rightarrow \mathrm{Sa}$	$(\forall B)$ 2 (2)
5.	Ma	$(\wedge B)$ 3 (3)
6.	Sa	$(\rightarrow B)$ 4, 5 (2, 3)
7.	$\neg \mathrm{Pa}$	$(\wedge B)$ 3 (3)
8.	$\mathrm{Sa} \wedge \neg \mathrm{Pa}$	$(\wedge E)$ 6, 7 (2, 3)
9.	$\exists x(\mathrm{Sx} \wedge \neg \mathrm{Px})$	$(\exists E)$ 8 (2, 3)
10.	$\exists x(\mathrm{Sx} \wedge \neg \mathrm{Px})$	$(\exists B)$ 1, 3, 9 (1, 2, ~~3~~)

Beweis mittels Semantischen Bäumen

Beweis von $(F \wedge G) \rightarrow F$

$$
\begin{array}{c}
\neg((F \wedge G) \rightarrow F) \\
| \\
F \wedge G \\
\neg F \\
| \\
F \\
G \\
| \\
X
\end{array}
$$

Beweis von $((F \rightarrow G) \wedge F) \rightarrow G$

$$
\begin{array}{c}
\neg(((F \rightarrow G) \wedge F) \rightarrow G) \\
| \\
(F \rightarrow G) \wedge F \\
\neg G \\
| \\
F \rightarrow G \\
F \\
/ \quad \backslash \\
\begin{array}{cc} \neg F & G \\ | & | \\ X & X \end{array}
\end{array}
$$

Beweis von $\neg \exists x\, Ax \Leftrightarrow \forall x \neg Ax$

$$
\begin{array}{c}
\neg(\neg \exists x\, Ax \Leftrightarrow \forall x \neg Ax) \\
/ \quad \backslash \\
\begin{array}{cc}
\neg \exists x\, Ax & \neg\neg \exists x\, Ax \\
\neg \forall x \neg Ax & \forall x \neg Ax \\
| & | \\
\forall x \neg Ax & \exists x\, Ax \\
| & | \\
X & Aa \\
 & \neg Aa \\
 & | \\
 & X
\end{array}
\end{array}
$$

Beweis von disamis (3. Figur)

$$
\begin{array}{lcl}
\text{MiP} & & \exists x(Mx \wedge Px) \\
\underline{\text{MaS}} & \Rightarrow & \underline{\forall x(Mx \rightarrow Px)} \\
\text{SiP} & & \exists x(Sx \wedge Px)
\end{array}
$$

Hierzu werden alle Prämissen sowie die negierte Conclusio als Regel eingeführt, denn es gilt:

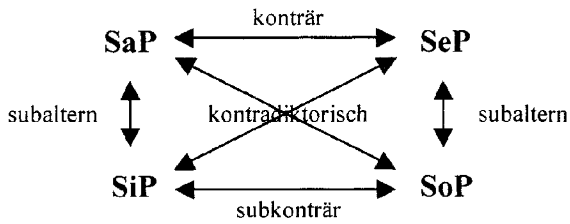
$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \neg C \rightarrow \perp \Rightarrow P_1, P_2, \ldots, P_n \rightarrow C$$

$$
\begin{array}{c}
\exists x(Mx \wedge Px) \\
\forall x(Mx \rightarrow Sx) \\
\neg \exists x(Sx \wedge Px) \\
| \\
Ma \wedge Pa \\
| \\
\forall x \neg(Sx \wedge Px) \\
| \\
Ma \rightarrow Sa \\
| \\
\neg(Sa \wedge Pa) \\
| \\
Ma \\
Pa \\
/ \qquad \backslash \\
\begin{array}{cc}
\neg Ma & Sa \\
| & / \quad \backslash \\
X & \begin{array}{cc} \neg Sa & \neg Pa \\ | & | \\ X & X \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Logik ist die Lehre von der Gültigkeit von Schlüssen
a) aufgrund der Form allein.
b) Aufgrund der Bedeutung der (logischen) Partikel allein.

Logisches Quadrat:

	affirmo / nego
Alle S sind P	SaP
Einige S sind P	SiP
Kein S ist P	SeP
Einige S sind nicht P	SoP



Konträr: Zwei Aussagen können zwar beide falsch, jedoch nicht beide wahr sein. Aus der Wahrheit der einen folgt die Falschheit der anderen.
Subkonträr: Zwei aussagen können zwar beide wahr, jedoch nicht beide falsch sein. Aus der Falschheit der einen folgt die Wahrheit der anderen.
Kontradiktorisch: Genau eine der beiden Aussagen ist wahr, die andere falsch. Aus der Wahr- bzw. Falschheit einer Aussage folgt die Falsch- bzw. Wahrheit der anderen.
Subaltern: Die universale Aussage ist der partikulären Aussage übergeordnet. Aus der Wahrheit der übergeordneten folgt die Wahrheit der untergeordneten, aus der Falschheit der untergeordneten folgt die Falschheit der übergeordneten.

Syllogismus-Figuren

	1.	2.	3.	4.
P_1	MxP	PxM	MxP	PxM
P_2	SxM	SxM	MxS	MxS
C	SxP	SxP	SxP	SxP

W-Schema

\ | | /

Gültige Syllogismen:

1. Figur	2. Figur	3. Figur	4. Figur
barbara	baroco	bocardo	* bamalip
* barbari	camestres	* darapti	calemes/camenes
celarent	* camestrop	datisi	* calemop
* celaront	cesare	disamis	dimatis/dimaris
darii	* cesarop	* felapton	* fesapo
ferio	festino	ferison	fresison

*eingeschränkte Syllogismen

Nicht beide Prämissen dürfen negativ sein.
Wenn eine Prämisse negativ ist, ist auch die Conclusio negativ.
Wenn eine Prämisse partikulär ist, ist auch die Conclusio partikulär.
Problematisch sind genau jene Syllogismen, bei denen *lediglich* die Conclusio partikulär ist.

s: conversio simplex	SxP $\Rightarrow$ PxS
p: conversio per accidens	SxP $\Rightarrow$ PyS
m: mutatio	$P_1 \Leftrightarrow P_2$ Tausch der Prämissen
c: contradictio	$\neg\neg$ SxP $\Rightarrow$ SxP Tausch mit Conclusio und Negation beider vertauschter Zeilen

PS: Formale Logik **Formelsammlung** **Willem Warnecke**

Alphabet

	Zeichen	Metazeichen		Zeichen	Metazeichen
Formelvariablen	F, G, H,...	F*, G*, H*,...	Negator (nicht)	$\neg$	$\neg$
Individualkonstanten (freie Individualvariablen)	a, b, c,...	a*, b*, c*,...	Konjunktor	$\wedge$	,
Individualvariablen (gebundene Ind.-variablen)	x, y, z,...	x*, y*, z*,...	Adjunktor/Disjunktor	$\vee$	/
Prädikatenkonstanten (freie Prädikatenvariablen)	A, B, C,...	A*, B*, C*,...	Subjunktor/Implikator [verw. in Implikation]	$\rightarrow$	$\Rightarrow$
Prädikatenvariablen (gebundene Präd.-variablen)	P, Q, R,...	P*, Q*, R*,...	Bisubjunktor [verw. in Äquivalenz]	$\leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
Allquantor	$\forall$		Falsum (Widerspruch)	$\perp$	$\perp$
Existenzquantor (Einsquantor)	$\exists$		Nach Annahme von F* kann G* abgeleitet werden		[F*]...G*

(Einführungs- und Beseitigungs-) Regeln für das Kalkül des natürlichen Schließens für die klassische Aussagenlogik

($\wedge$E)	$F^*, G^* \Rightarrow F^* \wedge G^*$	($\wedge$B)	$F^* \wedge G^* \Rightarrow F^*$ $F^* \wedge G^* \Rightarrow G^*$
($\vee$E)	$F^* \Rightarrow F^* \vee G^*$ $F^* \Rightarrow G^* \vee F^*$	($\vee$B)	$F^* \vee G^*, [F^*]\ldots H^*, [G^*]\ldots H^* \Rightarrow H^*$
($\rightarrow$E)	$[F^*]\ldots G^* \Rightarrow F^* \rightarrow G^*$ $F^* \Rightarrow G^* \rightarrow F^*$	($\rightarrow$B)	$F^*, F^* \rightarrow G^* \Rightarrow G^*$
($\leftrightarrow$E)	$F^* \rightarrow G^*, G^* \rightarrow F^* \Rightarrow F^* \leftrightarrow G^*$	($\leftrightarrow$B)	$F^*, F^* \leftrightarrow G^* \Rightarrow G^*$ $F^*, G^* \leftrightarrow F^* \Rightarrow G^*$
($\neg$E)	$[F^*]\ldots\perp \Rightarrow \neg F^*$	($\neg$B)	$F^*, \neg F^* \Rightarrow \perp$
($\perp$)	$\perp \Rightarrow F^*$	($\neg\neg$)	$\neg\neg F^* \Rightarrow F^*$

Quantorenlogische Erweiterungen für das Kalkül des natürlichen Schließens

($\forall$E)	$F^*(a^*) \Rightarrow \forall x^*\, F^*(a^* \backslash x^*)$	Bedingung: a* ist frei für alle x* in F* (F*(a*) hängt von keiner Zeile ab, in der a* auftritt).
($\forall$B)	$\forall x^*\, F^*(x^*) \Rightarrow F^*(x^* \backslash a^*)$	Bedingung: –
($\exists$E)	$F^*(a^*) \Rightarrow \exists x^*\, F^*(a^* \backslash x^*)$	Bedingung: –
($\exists$B)	$\exists x^*\, F^*(x^*),\ [F^*(x^* \backslash a^*)]\ldots G^* \Rightarrow G^*$	Bedingung: a* ist neu und wird wieder beseitigt (a* tritt nicht in G* auf; G* hängt von keiner anderen Zeile (neben [F*(x*\a*)]) ab, in der a* auftritt).

Entwicklungsregeln für die Semantischen Bäume für die klassische Aussagenlogik

$F^* \wedge G^*$ F^* G^*	$\neg(F^* \wedge G^*)$ $\neg F^*$ $\neg G^*$	$F^* \vee G^*$ F^* G^*	$\neg(F^* \vee G^*)$ $\neg F^*$ $\neg G^*$	$\neg\neg F^*$ F^*
$F^* \rightarrow G^*$ $\neg F^*$ G^*	$\neg(F^* \rightarrow G^*)$ F^* $\neg G^*$	$F^* \leftrightarrow G^*$ F^* $\neg F^*$ G^* $\neg G^*$	$\neg(F^* \leftrightarrow G^*)$ F^* $\neg F^*$ $\neg G^*$ G^*	F^* $\neg F^*$ X

Quantorenlogische Erweiterungen für die Semantischen Bäume

$\neg\forall x^*\, F^*(x^*)$ $\exists x^*\, \neg F^*(x^*)$	$\neg\exists x^*\, F^*(x^*)$ $\forall x^*\, \neg F^*(x^*)$	$\forall x^*\, F^*(x^*)$ $F^*(x^* \backslash a^*)$	$\exists x^*\, F^*(x^*)$ $F^*(x^* \backslash a^*)$	Bedingung: a* ist neu im Zweig.